# CH I ESPACES VECTORIELS

**Dans ce qui suit, K = (R, +, .) ou K = (C, +, .), ou K est un corps commutatif quelconque muni d'une adition + ; d'une multiplication . , et dont l'élément neutre pour l'addition est noté alors O ou $O_K$**

## I.1 ESPACES VECTORIELS. COMBINAISONS LINEAIRES

### I. 1-1 DEFINITION

Un **K-**espace vectoriel (ou **espace vectoriel sur K**) est un ensemble E **non vide** muni :

A/ d'une loi de composition interne notée additivement, c'est à dire une application de ExE dans E

$$\begin{aligned} E \times E &\to E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

B / d'une loi de composition externe par les éléments de K, notée multiplicativement, c'est à dire une application de KxE dans *E*

$$\begin{aligned} K \times E &\to E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda.u \end{aligned}$$

**ces deux lois (ou opérations) vérifiant 8 axiomes :**

<u>1) Axiomes relatifs à la loi interne :</u>

**a) Associativité**, c'est à dire que pour tous éléments u, v et w de E :

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

**b)** Il existe un **élément neutre**, c'est à dire qu'il existe un élément de E, noté 0, vérifiant pour tout élément *u* de E : u + o = o + u = u . S'il y a ambigüité, on note ce vecteur nul $O_E$ ou $\vec{o}$

**c)** Tout élément v de E admet un **symétrique**, c'est à dire qu'il existe un élément v' de E tel que

v + v' = v' + v = O . Cet élément *v'* est noté –*v* et s'appelle vecteur opposé de v

**d) Commutativité**, c'est à dire que pour tous éléments u et v de E : u + v = v + u

<u>2) Axiomes relatifs à la loi externe</u>

**a)** Pour tous éléments $\lambda$ et $\mu$ de K, pour tout élément v de E : $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
**b)** Soit 1, l'élément neutre de la multiplication de K. Pour tout élément *v* de E : 1v = v

<u>3) Axiomes liant les deux lois : double distributivité</u>

**a)** Distributivité par rapport à l'addition des scalaires :
Pour tout $\lambda$ et $\mu$ de K et pour tout élément u de E : $(\lambda + \mu).u = \lambda .u + \mu.u$
**b)** Distributivité par rapport à l'addition des vecteurs :
Pour tout élément $\lambda$de K et pour tous éléments u et v de E : $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$

### I.1-2 REMARQUES

Les éléments du corps K sont appelés **scalaires**, notés en général avec des lettres grecques $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... Le corps K est appelé **le corps des scalaires**. Les éléments de l'espace vectoriel seront appelés **vecteurs** ou **éléments de E** et notés avec des lettres latines *u, v, U, V, x, y, f, g*... pas forcément surmontées d'une flèche.

### I.1-3 THEOREME FONDAMENTAL :

$$\boxed{\lambda . u = O_E \quad \text{ssi} \quad \lambda = O_K \ \text{ ou } \ u = O_E}$$

### I.1-4 COMBINAISON LINEAIRE DE *n* VECTEURS

Soit *n* un entier supérieur ou égal à 1 et $u_1, u_2, \dots, u_n$ *n* vecteurs d'un K-espace vectoriel E. Tout vecteur de la forme $\alpha_1. u_1 + \alpha_2. u_2 + \dots + \alpha_n.u_n$ (où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des éléments de K), est appelé **combinaison linéaire** (**CL**) des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$. Les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

### I.1-5 PARTIES STABLES :

**Pour une loi interne :** Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne, notée +, et F une partie non vide de E ; F est dite **stable pour la loi interne** si pour tout couple (u , v) d'éléments de F la somme u + v appartient à F.

$$\forall u \in F, \forall v \in F : \quad u + v \in F$$

**Pour une loi externe :** Soit E un ensemble muni d'une loi de composition externe de domaine d'opérateurs K et F une partie non vide de E ; F est dite **stable pour la loi externe** si pour tout élément λ de K et pour tout élément u de F, λ.u appartient à F.

$$\forall \lambda \in K, \forall u \in F : \quad \lambda u \in F$$

## I.2 SOUS-ESPACES VECTORIELS

### I.2-1 THEOREME ET DEFINITION D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL (SEV)

Soit E un K-espace vectoriel, et soit F une partie de E telle que :

- F est non vide
- F est stable pour l'addition.
- F est stable pour la multiplication par un scalaire.

Alors la partie F, munie de ces deux lois, a une structure de K-espace vectoriel : F est appelée **sous-espace vectoriel de E**.

### I.2-2 CARACTERISATION D'UN SEV

**Théorème**

Soit E un K-espace vectoriel et F une partie de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- F est non vide
- Toute combinaison linéaire de deux éléments de F appartient à F :

$$\forall u \in F, \forall v \in F, \forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \alpha u + \beta v \in F$$

Ce qui revient à dire que : Une partie non vide F d'un K-espace vectoriel E est sous-espace vectoriel de E si et seulement si elle est **stable par combinaison linéaire**. C'est-à-dire : toute CL d'éléments de F appartient à F

### I.2-3 SOUS-ESPACE ENGENDRE PAR UNE PARTIE FINIE

**Théorème 1 : sous-espace engendré par une partie finie**

Soit A une partie finie du K-espace vectoriel E, alors l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A est un sous-espace vectoriel de E ; c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant A : autrement dit, il est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant A.

Ce sous-espace vectoriel est appelé **sous-espace engendré par A et on peut le noter Vect(A).**

Comme A est finie, soit p le nombre d'éléments de A et $v_1, v_2, \dots, v_p$ les vecteurs constituant A. Un vecteur u de E appartient à Vect(A) ssi il peut s'écrire comme CL de $v_1, v_2, \dots, v_p$, c'est-à-dire ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ dans K tels que $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p$

**Théorème 2 : sous-espace engendré par une partie quelconque non vide**

Soit A une partie non vide d'un K-espace vectoriel E. On définit le sous-espace vectoriel engendré par A, comme étant l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$u \in \text{Vect}(A) \Leftrightarrow \{\exists n \in N^*, \exists(v_1, v_2, ..., v_n) \in A^n, \exists(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n \text{ tels que}: u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n\}$$

On démontre que c'est bien un sous-espace vectoriel de E et que c'est le plus petit sous-espace vectoriel de *E* contenant A (au sens de l'inclusion).

# CH II APPLICATIONS LINEAIRES

**Dans ce qui suit, K = (R, +, .) ou K = (C, +, .), ou K est un corps commutatif quelconque muni d'une addition + ; d'une multiplication . , et dont l'élément neutre pour l'addition est noté alors O ou $O_K$**

## II.1 DEFINITION ET PREMIERE PROPRIETES

### II. 1-1 DEFINITION

Soient *E* et *F* deux **K**-espaces vectoriels; une application *f* de *E* dans *F* est appelée application linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

(1) Pour tous vecteurs *u* et *v* de *E* :

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

(2) Pour tout vecteur *u* de *E* et pour tout scalaire k de **K**,

$$f(k.u) = k.f(u).$$

L'ensemble des applications linéaires de *E* dans *F* est noté $L(E,F)$ ou $L_K(E,F)$

### II.1-2 PROPRIETES

Soient *E* et *F* deux **K**-espaces vectoriels ; si *f* est une application linéaire de *E* dans *F* alors $f(O_E) = O_F$
et, pour tout vecteur *u* de *E*, f(-u) = - f(u)

### II.1-3 REMARQUE METHODOLOGIQUE :

Soit *f* une application d'un espace vectoriel *E* dans un espace vectoriel *F*. Lorsqu'on cherche à répondre à la question suivante : " *f* est-elle linéaire ? ", on peut rapidement déterminer $f(O_E)$ :

- si $f(O_E)$ n'est pas égal à $O_F$, alors on peut conclure que *f* n'est pas linéaire,
- si $f(O_E) = O_F$,, on ne peut rien conclure et il faut alors vérifier que *f* satisfait à chacune des deux propriétés de linéarité.

## II.2 CARACTERISATION D'UNE APPLICATION LINEAIRE (AL)

### II.2-1 THEOREME

Soient *E* et *F* deux **K**-espaces vectoriels et *f* une application de *E* dans *F* ; l'application *f* est linéaire si et seulement si, pour tous vecteurs *u* et *v* de *E* et pour tous scalaires α et β de **K**,

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

### II.2-2 IMAGE D'UNE CL PAR UNE AL

Soient *E* et *F* deux **K**-espaces vectoriels et *f* une AL de *E* dans *F*, alors

$$\forall n \in N^*, \forall(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n, \forall(u_1, u_2, ... u_n) \in E^n$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(u_i)$$

### II.2-3 VOCABULAIRE ET NOTATIONS

Soit *E* et *F* deux **K**-espaces vectoriels.

1. Une AL de *E* dans *F* est aussi appelée **homomorphisme** d'espace vectoriel.
2. L'ensemble desAL de *E* dans *F* est noté L(E,F) ou $L_K(E,F)$.
3. Une AL bijective de *E* sur *F* est appelée **isomorphisme** d'espace vectoriel.
4. Une AL de *E* dans *E* est appelée **endomorphisme** de *E*.
5. L'ensemble des endomorphismes de *E* est noté L(E) ou $L_K(E)$.
6. Un endomorphisme bijectif de *E* est appelé **automorphisme** de *E*.
7. L'ensemble des automorphismes de *E* est noté GL(E) ou $GL_K(E)$.
8. Une AL de *E* dans **K** est appelée **forme linéaire** sur *E*. **K** est considéré ici comme un espace vectoriel sur **K**.

## II.3 OPERATIONS SUR LES APPLICATIONS LINEAIRES

### II.3-1 STRUCTURE DE L(E,F)

*f, g* étant deux éléments de L(E,F), et λ étant un élément de **K**, pour tout vecteur *u* de *E*, on pose
$(f + g)(u) = f(u) + g(u)$ et $(\lambda f)(u) = \lambda f(u)$
On définit donc ainsi une loi interne et une loi externe sur L(E,F) et :
**Théorème :** Soient *E* et *F* deux **K**-espaces vectoriels, l'ensemble des AL de *E* dans *F*, noté L(E,F), muni des deux lois définies précédemment, est un **K**-espace vectoriel.

### II.3-2 CAS OU E = F / STRUCTURE DE L(E)

a- Dans le cas particulier où E = F, l'ensemble L(E,E), noté plus simplement L(E), est l'ensemble des applications linéaires de *E* dans *E*, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de *E*. L'ensemble L(E) muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est donc un **K**-espace vectoriel.

b- **La loi ∘ de composition des AL :** Soient *E*, *F*, *G* trois **K**-espaces vectoriels.
Si *f* est une application linéaire de *E* dans *F* et *g* une application linéaire de *F* dans *G*, alors l'application $g \circ f$ est une application linéaire de *E* dans *G*.

c- **Dans le cas des endomorphismes (E = F = G), La loi ∘ est une loi interne de L(E)** En effet, si *f* et *g* sont deux endomorphismes de *E*, on peut définir les deux applications f °°g et g°f et et ce sont des endomorphismes de *E*.
L'ensemble L(E) est donc muni d'une deuxième loi de composition interne, la loi ∘.
D'après les propriétés de la composition des applications linéaires vues au paragraphe précédent, la loi ∘ possède dans L(E) les propriétés 3 et 4 suivantes.

d- **La loi ∘ est distributive par rapport à l'addition**
C'est-à-dire : $f°(g+h) = f°g + f°h$ et $(g+h)°f = g°f + h°f$

e- **La loi ∘ vérifie :** $(\alpha g)°f = g°(\alpha f) = \alpha(g°f)$

f- **La loi ∘ est associative dans L(E)**

g- **L'application identique, noté $Id_E$, est élément neutre pour la loi ∘**. C'est-à-dire que pout toute f de L(E), on an : $f°Id_E = Id_E°f = f$ :

**Attention** : la loi ° n'est pas en général commutative dans L(E).

## II.3 APPLICATIONS LINEAIRES ET SOUS ESPACES VECTORIELS. IMAGE ET NOYAU

### II.3-1 THEOREME : STRUCTURE DE L'IMAGE DIRECTE ET DE L'IMAGE RECIPROQUE

Soit *f* une application linéaire du **K**-espace vectoriel *E* dans le **K**-espace vectoriel *F*.

1. Si A est un sous-espace vectoriel de *E*, alors f(A) est un sous-espace vectoriel de *F*.
2. Si B est un sous-espace vectoriel de *F*, alors $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de *E*.

### II.3-2 DEFINITION ET STRUCTURE D'EV DE IM(F) ET KER(F)

**Définition**

Soient $E$ et $F$ deux **K**-espaces vectoriels et $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$.

- L'**image de *f***, notée Im(f), est l'ensemble des images des éléments de $E$ par $f$.
- Le **noyau de *f***, noté Ker(f) est l'ensemble des éléments de $E$ dont l'image est $O_F$.

**Théorème**
Im(f) est un sous-espace vectoriel de $F$.
Ker(f) est un sous-espace vectoriel de $E$.

# CH III ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE. BASES.

## III.1 BASES ET DIMENSION FINIE

### III. 1-1 FAMILLES GENERARICES

**Définition** Soit E un espace vectoriel sur un corps **K**. Soit $p$ un entier supérieur à 1 et $p$ vecteurs de E : $u_1, u_2, \dots, u_p$. **Les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ engendrent *E*** (on dit aussi que **la famille ($u_1, u_2, \dots, u_p$) est génératrice dans E**) si tout élément de $E$ est combinaison linéaire de ces vecteurs, ce qui peut s'écrire:

$$\forall u \in E,\ \exists(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p) \in K^p / u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_p u_p$$

### III. 1-2 FAMILLES LIBRES

**Définition** Soit E un espace vectoriel sur un corps **K**. Soit m un entier supérieur à 1 et m vecteurs de E : $u_1, u_2, \dots, u_m$. **Les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_m$ sont linéairement indépendants** (on dit aussi que **la famille ($u_1, u_2, \dots, u_m$) est libre**) ssi la seule combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_m$ égale au vecteurs nul est celle (dite triviale) dont tous les coefficients sont nul. Cela revient à démontrer que si

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m = \vec{0} \text{ alors forcément } \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_m = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est **liée**, ou encore que les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_m$ sont **linéairement dépendants**. Cela revient à dire qu'il existe une CL nulle de $u_1, u_2, \dots, u_m$ dont au moins un coefficient est non nul, ou encore qu'au moins un des m vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_m$ est CL des autres vecteurs.

### III. 1-3 BASES ET DIMENSION FINIE

**Théorème et définition :** Soit E un espace vectoriel sur un corps **K**. S'il existe un entier n supérieur à 1 et une famille B = ( $u_1, u_2, \dots, u_n$) de n vecteurs **à la foi génératrice ET libre**, alors B s'appelle **une base de E et E est un espace vectoriel de dimension finie n**.

Dans ce cas :

1. Tout vecteur u de E s'écrit de manière unique comme CL des vecteurs de B :
$(\forall u \in E)(\exists!(x_1, x_2, ..., x_n) \in K^p / u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n$. Les scalaires $(x_1, x_2, ..., x_n)$ s'appellent les composantes de u dans la base B et on note $u(x_1, x_2, ..., x_n)_{\mathbf{B}}$
2. Si $u(x_1, x_2, ..., x_n)_{\mathbf{B}}$ et $v(y_1, y_2, ..., y_n)_{\mathbf{B}}$, alors $u = v \Leftrightarrow (x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n)$
3. Toute autre base de E possède également exactement n vecteurs.

**Exemples fondamentaux :** ($K^n$, +, .) est toujours un ev de dimension finie égale à n.
Dans l'espace vectoriel ($K^n$, +, .), la base la plus simple, appelée base canonique, est : B = ( $e_1, e_2, \dots, e_n$) avec $e_1$ = (1, 0, 0, …, 0) ; $e_2$ = (0, 1, 0, 0, …, 0) ; etc. ; $e_n$ = (0, 0, …, 0, 1), où 1 est l'élément neutre de la multiplication dans K.
Ainsi, si K = R et n = 2, la base canonique de ($R^2$, +, .) est B = ($e_1, e_2$) avec $e_1$ = (1, 0) et $e_2$ = (0, 1).
Si K = R et n = 3, la base canonique de ($R^3$, +, .) est B = ($e_1, e_2, e_3$) avec $e_1$ = (1, 0, 0) ; $e_2$ = (0, 0, 1) et $e_3$ =(0, 0, 1).

**Théorème fondamental :** Dans un espace vectoriel **de dimension finie n**, une famille **de n vecteurs** est une base ssi elle est libre **OU** génératrice (car dans ce cas, l'une des deux propriétés implique l'autre pour la famille en question). En pratique, il est souvent plus aisé de démontrer qu'elle est libre.
**Remarque :**

Une base d'un espace vectoriel E de dimension finie n étant connue, connaître un vecteur revient à connaître le n-uplet de ses coordonnées dans cette base. Cela revient finalement à se placer dans le K-ev des n-uplets de scalaires, à savoir $K^n$, et donc à travailler dans sa base canonique.
Ainsi, travailler dans l'espace à deux dimensions habituel $E_2$ muni de sa base canonique B = (i, j) revient à travailler dans ($R^2$, +, .) et sa base canonique B = ($e_1$, $e_2$). Travailler dans l'espace à trois dimensions habituel $E_3$ muni de sa base canonique B = (i, j, k) revient à travailler dans ($R^3$, +, .) et sa base canonique B = ($e_1$, $e_2$, $e_3$).

## III.2 PREMIER APERÇU SUR LES MATRICES

### III. 2-1 MATRICE DE CHANGEMENT DE BASE

**Si E est un espace vectoriel de dimension finie n,** muni d'une base B = ($u_1$, $u_2$, …, $u_n$) et d'une base B' = ($u'_1$, $u'_2$, …, $u'_n$). On appelle matrice de passage de B à B', que l'on note P ou $P_{B,B'}$ le tableau à n lignes et n colonnes composé de la manière suivante : la j ième colonne de P est composée des n composantes de $u'_j$ dans la base B. On reviendra sur cette matrice dans le ch. IV

**Exemple :** Dans l'espace à 3 dimensions classique muni de la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considérons la famille $B' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ avec $\begin{cases} \vec{i}' = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{j}' = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{k}' = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \end{cases}$. Il est facile de démontrer que B' est aussi une base de E et la matrice P vaut alors : $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

### III. 2-2 MATRICE D'UNE APPLICATION LINEAIRE RELATIVEMENT A UNE BASE DE L'EV DE DEPART ET UNE BASE DE L'EV D'ARRIVEE.

**Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie n,** muni d'une base B = ($u_1$, $u_2$, …, $u_n$), et **F est un K-espace vectoriel de dimension finie m,** muni d'une base C = ($v_1$, $v_2$, …, $v_m$),
Si f est une application linéaire de E dans F, la matrice A = Mat(f,B,C) de f relativement aux bases B et C est le tableau à m lignes et n colonnes composé de la manière suivante : la j ième colonne de A est composée des m composantes de $f(u_j)$ dans la base C. On reviendra sur cette matrice dans le ch. IV.
Dans le cas où E = F (endomorphismes), A est une matrice carrée (m = n).
**Exemple :**

$$f : \left| \begin{array}{l} R^3 \to R^2 \\ (x,y,z) \mapsto (X = 2x - 3y + z, Y = -5x + 4y + 3z) \end{array} \right.$$

B matrice canonique de $R^3$ : B = ($e_1$, $e_2$, $e_3$) avec $e_1$ = (1,0,0), $e_2$ = (0,1,0), $e_3$ = (0,0,1)
C matrice canonique de $R^2$ : B = ($f_1$, $f_2$) avec $f_1$ = (1,0), $f_2$ = (0,1)
On voit que f($e_1$) = (2, -5), f($e_2$) = (-3, 4), et f($e_3$) = (1, 3)
Donc

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

On remarque que l'on retrouve en colonnes les coefficients de x, y et z dans la définition de f. Si l'on convient du produit ligne par colonne entre la matrice A et la matrice colonne d'une vecteur u = (x, y, z), on obtient directement la matrice colonne du vecteur f(u) :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ -5x + 4y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Cela nous donne déjà l'idée de la définition du produit d'une matrice à n colonnes par une matrice à n lignes.

# CH IV MATRICES, DETERMINANTS & SYSTEMES LINEAIRES

## IV.1 DEFINITIONS ET CAS PARTICULIERS

### IV. 1-1 DEFINITIONS

Une matrice n × m est un tableau de nombres à n lignes et m colonnes : n et m sont les *dimensions* de la matrice.
On note $a_{ij}$ l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots\cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots\cdots & a_{2,m} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots\cdots & a_{i,m} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ & & & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots\cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$
la matrice d'élément général $a_{ij}$

Si m = 1, la matrice est appelée *vecteur-colonne* : elle représente en effet la colonne des composantes d'un vecteur u d'un espace vectoriel de dimension dans une base de cet espace.
Si n = 1, m quelconque, la matrice est appelée *vecteur-ligne* : $X = (x_1, x_2, .. ; , x_m)$
Si n = m, la matrice est appelée *matrice carrée*.

### IV. 1-2 QUELQUES MATRICES CARREES PARTICULIERES

**Quelques matrices carrées particulières (Exemples avec n = 4)**

Matrice unité

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Parfois notée $\mathbf{I}_n$
n est la dimension de la matrice
(soit $\mathbf{I}_4$ dans cet exemple)

Matrice diagonale

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix}$$

notée $diag(D_{ii})$

Matrice triangulaire supérieure

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}$$

Une matrice carrée **A** est dite **symétrique** si pour tout i différent de j: $a_{ji} = a_{ij}$

## IV.2 OPERATIONS SUR LES MATRICES

### IV. 2-1 ADDITION - SOUSTRACTION
L'addition et la soustraction des matrices se font terme à terme. Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions.

### IV.2-2 MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE
Chaque terme de la matrice est multiplié par le nombre.

### IV.2-3. TRANSPOSITION
La transposée $\mathbf{A}^T$ d'une matrice **A** est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de **A**.

La transposée d'un vecteur-colonne est un vecteur-ligne :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

### IV.2-4. MULTIPLICATION DES MATRICES
Définissons tout d'abord le produit d'un vecteur-ligne **u** par un vecteur-colonne **v** de même dimension:

$$(x_1, x_2, ...., x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i$$

Ce produit est appelé *produit scalaire* des vecteurs **x** et **y**, noté **x** · **y**. Le produit matriciel s'en déduit : le produit de la matrice **A** (n × m) par la matrice **B** (m × p) est la matrice **C** (n × p) telle que l'élément $C_{ij}$ est égal au produit scalaire de la ligne i de la matrice **A** par la colonne j de la matrice **B**.

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj} \qquad i = 1..n \quad j = 1..p$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 9 \end{pmatrix}$$

**Propriétés :**
- Le produit matriciel est :
  - *associatif* : **ABC** = (**AB**)**C** = **A**(**BC**)
  - *distributif par rapport à l'addition* : **A**(**B** + **C**) = **AB** + **AC**
  - *non commutatif* : **AB** n'est pas égal à **BA** en général.
- La matrice unité **I** est *élément neutre* pour la multiplication : $\mathbf{AI}_m = \mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$, si la matrice **A** est de dimensions n × m.
- Transposée d'un produit : $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (Attention au changement d'ordre !).

**Un produit particulier :**
(**x** est un vecteurs-ligne)

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Carré scalaire.
Sa racine carrée $(\mathbf{x}^T\mathbf{x})^{1/2}$ est appelée *norme* du vecteur ( notée $\|\mathbf{x}\|$)

## IV.3 INVERSION DES MATRICE CARREES / DETERMINANTS

### IV.3-1. INVERSION DES MATRICES CARREES

**Définition** Une matrice carrée **A** est dite *inversible* ou *régulière* s'il existe une matrice carrée $\mathbf{A}^{-1}$ (appelée *matrice inverse*) telle que : $\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{I}$

Si $\mathbf{A}^{-1}$ n'existe pas, la matrice **A** est dite *singulière*

**Propriétés :**

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ (Attention au changement d'ordre !)
- $[\mathrm{diag}(D_{ii})]^{-1} = \mathrm{diag}(1/D_{ii})$
- La matrice **A** est dite *orthogonale* si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{T}$
-

### IV.3-2. DETERMINANT D'UNE MATRICE CARREE

**Matrice 2x2**

Pour une matrice 2 × 2, on montre que la matrice inverse est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Le nombre ad - bc est appelé *déterminant* de la matrice **A**, noté :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

La matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$ n'existe donc que si det **A** est différent de zéro.
La matrice **A** est singulière si det **A** = 0, régulière dans le cas contraire. Ce résultat se généralise à une matrice de dimension quelconque.

**Matrice nxn**

**M** une matrice carrée quelconque (n lignes, n colonnes).

**Développement du déterminant par rapport à la *i*-ème ligne**

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre *n*. Il est évident que si l'on supprime une ligne et une colonne dans *A*, la matrice obtenue est à n – 1 lignes et n – 1 colonnes. On note $A_{i,j}$ la matrice obtenue en supprimant la *i*-ème ligne et la *j*-ième colonne.
La formule

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} + (-1)^{i+2} a_{i,2} \det A_{i,2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{i,n} \det A_{i,n}$$

est appelée le **développement du déterminant de A par rapport à la *i*-ème ligne**. On peut calculer un déterminant en le développant suivant n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne.
Ainsi, suivant la $j^{\text{ième}}$ colonne :

$$\det A = (-1)^{j+1} a_{1,j} \det A_{1,j} + (-1)^{j+2} m_{2,j} \det A_{2,j} + \ldots + (-1)^{j+n} a_{1,j} \det A_{n,j}$$

Le scalaire $C_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A_{i,j}$ est appelé le **cofacteur de** $a_{i,j}$. Le scalaire $\det A_{i,j}$ est appelé le **mineur** de $a_{i,j}$.

Ainsi :
Soit A= $(a_{i,j})$ une matrice d'ordre n, $C_{i,j}$ ses cofacteurs.
Alors on a :

- développement par rapport à la i-ème ligne : $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} C_{i,j}$
- développement par rapport à la j-ème colonne : $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{1,j} C_{i,j}$

La comatrice d'une matrice carrée A, notée comA, est la matrice des cofacteurs de A : comA = $(c_{i,j})$

**Propriétés des déterminants :**

- $\det(\mathbf{A}^{T}) = \det(\mathbf{A})$

- det(**AB**) = det(**A**) × det(**B**)
- Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des éléments diagonaux. En particulier, det(**I**) = 1 (si **I** est la matrice unité)
- Si **A** est inversible, det($\mathbf{A}^{-1}$) = 1 / det(**A**)
- On peut simplifier un déterminant en faisant apparaître un maximum de zéros sur une ligne ou sur une colonne (voir TD).

### IV.3-3. CALCUL DE L'INVERSE D'UNE MATRICE

**Théorème fondamental :**

**A est inversible ssi** $\det A \neq 0$. Dans ce cas : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\mathrm{Com}A)^T$

## IV.4 SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

### IV.4-1 FORMULATION MATRICIELLE

Un système de n équations linéaires à n inconnues est de la forme :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

où les $a_{ij}$ sont les coefficients du système, les $x_i$ les inconnues et les $b_i$ les termes constants.
Un tel système peut s'écrire sous forme matricielle : **Ax** = **b**
avec :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

### IV.4-2 CAS D'UNE MATRICE REGULIERE

Si la matrice **A** est régulière, on a, en multipliant à gauche par $\mathbf{A}^{-1}$ : $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$
Soit :

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}}$$

### IV.4-3 CAS D'UNE MATRICE SINGULIERE

Lorsque la matrice est singulière, deux cas sont à envisager :

- **Système indéterminé**
  S'il est possible d'exprimer p équations en fonction des autres, le système admet une infinité de solutions. On peut retenir le vecteur **x** qui a la plus faible norme.
  L'ensemble des solutions forme un sous-espace de dimension r = n - p dans l'espace de dimension n. Le nombre r est le *rang* de la matrice.
  *Exemple :*
  $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$
  Le déterminant vaut : 1 × 2 - 1 × 2 = 0. La matrice est bien singulière.
  La deuxième équation est égale à la première multipliée par 2. Il n'y a en fait qu'une seule équation : $x_1 + x_2 = 3$. C'est l'équation d'une droite (espace de dimension 1) dans le plan (espace de dimension 2). La matrice est de rang 1.
- **Système impossible**
  Si les équations ne peuvent pas être exprimées les unes en fonction des autres, le système n'admet aucune solution. On peut cependant calculer un vecteur **x** tel que la norme du vecteur **Ax** - **b** soit minimale (bien que non nulle). Ce vecteur constitue la meilleure approximation de la solution au sens des moindres carrés.
  *Exemple :*
  $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

La deuxième équation divisée par 2 donnerait $x_1 + x_2 = 4$, ce qui est incompatible avec la première équation. Le système n'a pas de solution.

# CH V / MATRICES & CHANGEMENTS DE BASE

## V.1 Pour un vecteur dans deux bases d'une même espace :

(E, +, .) est un K-ev de dimension finie n muni d'une ancienne base B et d'une nouvelle base B'. On note P la matrice de passage de B à B'. Si $u(x_1, x_2, \dots, x_n)_B$ et $u(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)_{B'}$ alors :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

## V.2 Pour la matrice d'une AL d'un espace dans un autre avec changements de bases dans les deux espaces :

E est un K-ev de dimension p muni de deux bases B et B'

F est un K-ev de dimension n muni de deux bases C et C'

F est une AL de E dans F, dont la matrice relativement à B et C est A (une (n,p) matrice) et la matrice relativement à B' et C' est A' (une (n,p) matrice)

$$.f : (E,+,.) ----------\to F(+,.)$$
$$u(x_1, x_2, \dots, x_p)_B ----(A)-\to f(u)(X_1, X_2, \dots, X_n)_C$$
$$\downarrow (P) et (P^{-1}) \qquad\qquad (Q) \text{ et } (Q^{-1}) \downarrow$$
$$u(x'_1, x'_2, \dots, x'_p)_{B'} ---(A')--\to f(u)(X'_1, X'_2, \dots, X'_n)_C$$

Alors : $A' = Q^{-1}AP$

**Dans le cas où E = F et B = B' et C = C', la formule devient** $A' = P^{-1}AP$

## V.3 Exemple récapitulatif

Fait en travaux dirigés